Invariantes de singularidades en característica positiva

Angélica Benito

Defensa de tesis doctoral

para optar al grado de Doctor en Matemáticas

Dirigida por

Orlando E. Villamayor U.

Universidad Autónoma de Madrid

22 de Marzo de 2010

Índice

1. **Panorama general y definiciones**
   - Álgebras de Rees y singularidades
   - Álgebras de Rees y transformaciones monoidales
   - Álgebra de Rees y estructura diferencial
2. **Algunos resultados en característica 0**
3. **Característica p: Proyecciones y presentaciones locales**
   - Proyecciones y álgebras de eliminación
   - Pendientes excepcionales y el álgebra monomial virtual
   - Aplicaciones de los resultados de la memoria

Resolución de singularidades

Dada una variedad algebraica X, una resolución de singularidades es una variedad *no singular* junto con un morfismo propio y birracional $X \xleftarrow{\pi} X_1$.

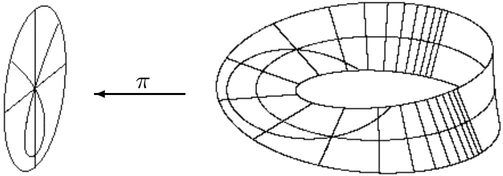
$$\begin{array}{rcl} \text{Birracional} & \longleftrightarrow & X \text{ y } X_1 \text{ son isomorfos en un abierto denso.} \\ \text{Propio} & \longleftrightarrow & \text{Evita trivialidades.} \end{array}$$

Resolución de singularidades

Dada una variedad algebraica X, una resolución de singularidades es una variedad *no singular* junto con un morfismo propio y birracional $X \xleftarrow{\pi} X_1$.

Birracional $\longleftrightarrow$ X y X_1 son isomorfos en un abierto denso.
Propio $\longleftrightarrow$ Evita trivialidades.

Herramientas:
(Blow-ups)



Resultados en el problema:

- Característica 0:
  - Curvas: Cremona, Noether, Riemann (S. XIX).
  - Superficies: Beppo Levi, Jung, Walker, Zariski (Principios del S.XX).
  - 3-folds: Zariski (1944).
  - Hironaka: dimensión arbitraria sobre cuerpos de característica 0 (1964).
  - Desingularización algorítmica: Villamayor, Bierstone-Milmann, Encinas, Hauser, Bravo, Włodarczyck, ...
- Característica p:
  - Abhyankar: superficies y 3-folds para $p \neq 2, 3, 5, 7$. No inmerso.
  - Lipman: esquemas excelentes de dimensión 2. No inmerso.
  - Patologías, dimensiones bajas: Giraud, Moh, Cossart, Piltant, Hauser, Cutkosky ...
  - Programas en activo: Hironaka, Kawanoue-Matsuki, Włodarczyk, Villamayor & co.

Resultados en el problema:

- Característica 0:
  - Curvas: Cremona, Noether, Riemann (S. XIX).
  - Superficies: Beppo Levi, Jung, Walker, Zariski (Principios del S.XX).
  - 3-folds: Zariski (1944).
  - Hironaka: dimensión arbitraria sobre cuerpos de característica 0 (1964).
  - Desingularización algorítmica: Villamayor, Bierstone-Milmann, Encinas, Hauser, Bravo, Włodarczyck, ...
- Característica p:
  - Abhyankar: superficies y 3-folds para $p \neq 2, 3, 5, 7$. No inmerso.
  - Lipman: esquemas excelentes de dimensión 2. No inmerso.
  - Patologías, dimensiones bajas: Giraud, Moh, Cossart, Piltant, Hauser, Cutkosky ...
  - Programas en activo: Hironaka, Kawanoue-Matsuki, Włodarczyk, Villamayor & co.

$V^{(d)}$ esquema liso de dimensión d sobre k.

Problema

$X \subset V^{(d)}$ hipersuperficie de multiplicidad máxima n.

$$\mathcal{F}_n = \{x \in X \mid mult_x(X) = n\}.$$

Definir una sucesión de transformaciones monoidales con centros en el conjunto de puntos de multiplicidad n de X (y transformados)

$$\begin{array}{ccccccc} X & & X_1 & & & & X_r \\ V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_1} & V_1^{(d)} & \xleftarrow{\pi_2} & \cdots & \xleftarrow{\pi_r} & V_r^{(d)} \end{array}$$

de tal forma que el conjunto de puntos de multiplicidad n de X_r sea

$$\mathcal{F}_n^r = \emptyset.$$

Observación: El problema de resolución se puede reducir a este problema particular.

Definición

Un **álgebra de Rees** es un *álgebra finitamente* generada $\mathcal{G} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n W^n$, donde I_n es un haz de ideales tal que

$$I_0 = \mathcal{O}_{V^{(d)}} \quad \text{e} \quad I_n \cdot I_m \subset I_{n+m} \text{ para } n, m \in \mathbb{N};$$

W es una variable muda para recordar el grado.

Definimos el **lugar singular** de $\mathcal{G} = \bigoplus I_n W^n$ como el cerrado

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) = \{x \in V^{(d)} \mid \nu_x(I_n) \geq n\}.$$

Asociada a cada álgebra se define una función

$$\mathrm{ord}^{(d)}(\mathcal{G}) : \mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$$

dada por $\mathrm{ord}^{(d)}(\mathcal{G})(x) = \min_{n>0} \left\{ \frac{\nu_x(I_n)}{n} \right\}$ para cada $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$.

Definición

Un álgebra de Rees es **simple** si para cada $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ existe n tal que $\nu_x(I_n) = n$, i.e., $\mathrm{ord}^{(d)}(\mathcal{G})(x) = 1$.

Definición

Un **álgebra de Rees** es un *álgebra finitamente* generada $\mathcal{G} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_n W^n$, donde I_n es un haz de ideales tal que

$$I_0 = \mathcal{O}_{V^{(d)}} \quad \text{e} \quad I_n \cdot I_m \subset I_{n+m} \text{ para } n, m \in \mathbb{N};$$

W es una variable muda para recordar el grado.

Definimos el **lugar singular** de $\mathcal{G} = \bigoplus I_n W^n$ como el cerrado

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) = \{x \in V^{(d)} \mid \nu_x(I_n) \geq n\}.$$

Asociada a cada álgebra se define una función

$$\mathrm{ord}^{(d)}(\mathcal{G}) : \mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$$

dada por $\mathrm{ord}^{(d)}(\mathcal{G})(x) = \min_{n>0} \left\{ \frac{\nu_x(I_n)}{n} \right\}$ para cada $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$.

Definición

Un álgebra de Rees es **simple** si para cada $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ existe n tal que $\nu_x(I_n) = n$, i.e., $\mathrm{ord}^{(d)}(\mathcal{G})(x) = 1$.

Definición

Un **álgebra de Rees** es un *álgebra finitamente* generada $\mathcal{G} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n W^n$, donde I_n es un haz de ideales tal que

$$I_0 = \mathcal{O}_{V^{(d)}} \quad \text{e} \quad I_n \cdot I_m \subset I_{n+m} \text{ para } n, m \in \mathbb{N};$$

W es una variable muda para recordar el grado.

Definimos el **lugar singular** de $\mathcal{G} = \bigoplus I_n W^n$ como el cerrado

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) = \{x \in V^{(d)} \mid \nu_x(I_n) \geq n\}.$$

Asociada a cada álgebra se define una función

$$\mathrm{ord}^{(d)}(\mathcal{G}) : \mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$$

dada por $\mathrm{ord}^{(d)}(\mathcal{G})(x) = \min_{n>0} \left\{ \frac{\nu_x(I_n)}{n} \right\}$ para cada $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$.

Definición

Un álgebra de Rees es **simple** si para cada $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ existe n tal que $\nu_x(I_n) = n$, i.e., $\mathrm{ord}^{(d)}(\mathcal{G})(x) = 1$.

Definición

Un **álgebra de Rees** es un *álgebra finitamente* generada $\mathcal{G} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n W^n$, donde I_n es un haz de ideales tal que

$$I_0 = \mathcal{O}_{V^{(d)}} \quad \text{e} \quad I_n \cdot I_m \subset I_{n+m} \text{ para } n, m \in \mathbb{N};$$

W es una variable muda para recordar el grado.

Definimos el **lugar singular** de $\mathcal{G} = \bigoplus I_n W^n$ como el cerrado

$$\operatorname{Sing}(\mathcal{G}) = \{x \in V^{(d)} \mid \nu_x(I_n) \geq n\}.$$

Asociada a cada álgebra se define una función

$$\operatorname{ord}^{(d)}(\mathcal{G}) : \operatorname{Sing}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$$

dada por $\operatorname{ord}^{(d)}(\mathcal{G})(x) = \min_{n>0} \left\{ \frac{\nu_x(I_n)}{n} \right\}$ para cada $x \in \operatorname{Sing}(\mathcal{G})$.

Definición

Un álgebra de Rees es **simple** si para cada $x \in \operatorname{Sing}(\mathcal{G})$ existe n tal que $\nu_x(I_n) = n$, i.e., $\operatorname{ord}^{(d)}(\mathcal{G})(x) = 1$.

Álgebras de Rees y transformaciones monoidales

Sea $\mathcal{G} = \bigoplus I_n W^n$. Dada una transformación monoidal de centro $C \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$,

$$V^{(d)} \xleftarrow{\pi_C} V_1^{(d)},$$

existe una factorización $I_n \mathcal{O}_{V_1^{(d)}} = I(H)^n I_n^{(1)}$, donde $H = \pi_C^{-1}(C)$.

Definición

El **transformado** de $\mathcal{G}$ se define como $\mathcal{G}_1 = \bigoplus I_n^{(1)} W^n$.

Observación

Si $\mathcal{G}$ es simple, entonces $\mathcal{G}_1$ es simple.

Una sucesión de transformaciones

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{G} & & \mathcal{G}_1 & & & & \mathcal{G}_r \\ V^{(d)} & \xleftarrow{\pi_1} & V_1^{(d)} & \xleftarrow{\pi_2} & \cdots & \xleftarrow{\pi_r} & V_r^{(d)} \end{array}$$

define una **resolución** de $\mathcal{G}$ si

- $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r) = \emptyset$.
- El lugar excepcional $E_r = \{H_1, \ldots, H_r\}$ tiene cruzamientos normales en $V_r^{(d)}$.

Álgebra de Rees y estructura diferencial (I)

Sean $V^{(d)}$, $x \in V^{(d)}$ un punto cerrado y $\{x_1, \ldots, x_d\}$ un s.r.p. en $\mathcal{O}_{V^{(d)},x}$. En el completado $\widehat{\mathcal{O}}_{V^{(d)},x} = k'[[x_1, \ldots, x_d]]$ se define el morfismo de Taylor:

$$\begin{aligned} k'[[x_1, \ldots, x_d]] &\longrightarrow k'[[x_1, \ldots, x_d, T_1, \ldots, T_d]] \\ x_i &\longmapsto x_i + T_i \end{aligned}$$

Para cualquier $f \in k'[[x_1, \ldots, x_d]]$,

$$Tay(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} g_\alpha T^\alpha.$$

Se define $\Delta^\alpha(f) := g_\alpha$. Se cumple que:

- $\Delta^\alpha(\mathcal{O}_{V^{(d)},x}) \subset \mathcal{O}_{V^{(d)},x}$
- $\{\Delta^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^d,\ 0 \leq |\alpha| \leq r\}$ genera $Diff_k^r$ localmente en x.

Álgebra de Rees y estructura diferencial (II)

Definición

$\mathcal{G} = \bigoplus I_n W^n$ es un **álgebra de Rees diferencial** si para cada $fW^n \in \mathcal{G}$ y $D \in Diff^r_{V^{(d)}}$ con $r < n$, se cumple $D(f)W^{n-r} \in \mathcal{G}$.

Propiedades

Existe una mínima álgebra diferencial $\mathcal{G}' \supset \mathcal{G}$ que cumple

- $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}') = \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$.
- *Lema de Giraud*: Cualquier sucesión de transformaciones de $\mathcal{G}$ induce una sucesión de transformaciones de $\mathcal{G}'$ (y viceversa). La igualdad de lugares singulares se mantiene:
$$\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r) = \mathrm{Sing}(\mathcal{G}'_r).$$
- Una resolución de $\mathcal{G}'$ induce una resolución de $\mathcal{G}$.

Supondremos que en $V^{(d)}$ el álgebra $\mathcal{G}$ es diferencial y simple.

Resolución en característica 0

Existencia de hipersuperficies de contacto maximal

$\mathcal{G} = \bigoplus I_n W^n$ diferencial y simple. Sea $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$. Entonces, existe $gW^1 \in \mathcal{G}$ tal que $\nu_x(g) = 1$. $\overline{V} = V(g_1)$ es un subesquema liso (**hipersuperficie de contacto maximal**).

Argumento inductivo

Sea $\overline{\mathcal{G}} = \bigoplus \overline{I}_n W^n$, donde $\overline{I}_n$ denota la restricción de I_n a $\overline{V}$ ($\overline{\mathcal{G}}$ es el **álgebra de coeficientes**).

- $\mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}}) \xleftrightarrow{1-1} \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ y $\mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}}) \subset \overline{V}$.
- La propiedad anterior es estable por explosiones.
- Una sucesión de transformaciones de $\mathcal{G}$ induce una suc. de transf. de $\overline{\mathcal{G}}$, $\overline{V} \xleftarrow{\overline{\pi}} \overline{V}_r$, y el lugar excepcional de $\overline{\pi}$ tiene cruzamientos normales.
- Resolución de $\mathcal{G}$ en $V^{(d)}$ $\Longleftrightarrow$ Resolución de $\overline{\mathcal{G}}$ en $\overline{V}$.

¿Cómo se llega a resolución?

1. Monomialización de $\overline{\mathcal{G}}$.
2. Resolución combinatoria del monomio.

Resolución en característica 0

Existencia de hipersuperficies de contacto maximal

$\mathcal{G} = \bigoplus I_n W^n$ diferencial y simple. Sea $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$. Entonces, existe $gW^1 \in \mathcal{G}$ tal que $\nu_x(g) = 1$. $\overline{V} = V(g_1)$ es un subesquema liso (**hipersuperficie de contacto maximal**).

Argumento inductivo

Sea $\overline{\mathcal{G}} = \bigoplus \overline{I}_n W^n$, donde $\overline{I}_n$ denota la restricción de I_n a $\overline{V}$ ($\overline{\mathcal{G}}$ es el **álgebra de coeficientes**).

- $\mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}}) \xleftrightarrow{1-1} \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ y $\mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}}) \subset \overline{V}$.
- La propiedad anterior es estable por explosiones.
- Una sucesión de transformaciones de $\mathcal{G}$ induce una suc. de transf. de $\overline{\mathcal{G}}$, $\overline{V} \xleftarrow{\overline{\pi}} \overline{V}_r$, y el lugar excepcional de $\overline{\pi}$ tiene cruzamientos normales.
- Resolución de $\mathcal{G}$ en $V^{(d)}$ $\iff$ Resolución de $\overline{\mathcal{G}}$ en $\overline{V}$.

¿Cómo se llega a resolución?

1. Monomialización de $\overline{\mathcal{G}}$.
2. Resolución combinatoria del monomio.

Resolución en característica 0

Existencia de hipersuperficies de contacto maximal

$\mathcal{G} = \bigoplus I_n W^n$ diferencial y simple. Sea $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$. Entonces, existe $gW^1 \in \mathcal{G}$ tal que $\nu_x(g) = 1$. $\overline{V} = V(g_1)$ es un subesquema liso (**hipersuperficie de contacto maximal**).

Argumento inductivo

Sea $\overline{\mathcal{G}} = \bigoplus \overline{I}_n W^n$, donde $\overline{I}_n$ denota la restricción de I_n a $\overline{V}$ ($\overline{\mathcal{G}}$ es el **álgebra de coeficientes**).

- $\mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}}) \xleftrightarrow{1-1} \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$ y $\mathrm{Sing}(\overline{\mathcal{G}}) \subset \overline{V}$.
- La propiedad anterior es estable por explosiones.
- Una sucesión de transformaciones de $\mathcal{G}$ induce una suc. de transf. de $\overline{\mathcal{G}}$, $\overline{V} \xleftarrow{\overline{\pi}} \overline{V}_r$, y el lugar excepcional de $\overline{\pi}$ tiene cruzamientos normales.
- Resolución de $\mathcal{G}$ en $V^{(d)} \iff$ Resolución de $\overline{\mathcal{G}}$ en $\overline{V}$.

¿Cómo se llega a resolución?

1. Monomialización de $\overline{\mathcal{G}}$.
2. Resolución combinatoria del monomio.

1. Panorama general y definiciones
   - Álgebras de Rees y singularidades
   - Álgebras de Rees y transformaciones monoidales
   - Álgebra de Rees y estructura diferencial

2. Algunos resultados en característica 0

3. **Característica p: Proyecciones y presentaciones locales**
   - Proyecciones y álgebras de eliminación
   - Pendientes excepcionales y el álgebra monomial virtual
   - Aplicaciones de los resultados de la memoria

¿Qué hacer en característica positiva?

En char p, $\mathcal{G}$ dif. y simple $\not\Rightarrow$ hip. cont. mxl. (ej. de Narasimhan).

Se sustituye la restricción por *proyecciones transversales*:

$$V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$$

Existe un álgebra $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[W]$, el **álgebra de eliminación**.

- En char 0, se identifican $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y $\overline{\mathcal{G}}$.
- Si $\mathcal{G}$ es diferencial, $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \xleftrightarrow{1-1} \beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}))=\mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$ (*).
- Para cada transformación monoidal $V^{(d)} \xleftarrow{\pi_C} V_1^{(d)}$, $C \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} & V^{(d)} \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & & V_1^{(d)} \supset \mathcal{U} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dl, "\beta_1"] & \mathcal{G}_1 \\
\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & V^{(d-1)} & V_1^{(d-1)} \arrow[l, "\widetilde{\pi}"'] & & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{G}_1$ es diferencial relativo a β_1, pero no diferencial absoluto.
- (*) no es estable por explosiones, pero $\beta_1(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)) \subset \mathrm{Sing}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1)$.
- *Bravo-Villamayor*: Existe una sucesión de transformaciones tal que

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}\left[\left(I(H_1)^{\alpha_1}\dots I(H_r)^{\alpha_r}\right)W^s\right] \text{ es monomial.}$$

¿Qué hacer en característica positiva?

En char p, $\mathcal{G}$ dif. y simple $\not\Rightarrow$ hip. cont. mxl. (ej. de Narasimhan).
Se sustituye la restricción por *proyecciones transversales*:

$$V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$$

Existe un álgebra $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[W]$, el **álgebra de eliminación**.

- En char 0, se identifican $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y $\overline{\mathcal{G}}$.
- Si $\mathcal{G}$ es diferencial, $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \xleftrightarrow{1-1} \beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) = \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$ (*).
- Para cada transformación monoidal $V^{(d)} \xleftarrow{\pi_C} V_1^{(d)}$, $C \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} & V^{(d)} \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & & V_1^{(d)} \arrow[ll, "\pi"'] & \supset \mathcal{U} \arrow[dl, "\beta_1"] & \mathcal{G}_1 \\
\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & V^{(d-1)} & & V_1^{(d-1)} \arrow[ll, "\widetilde{\pi}"'] & & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{G}_1$ es diferencial relativo a β_1, pero no diferencial absoluto.
- (*) no es estable por explosiones, pero $\beta_1(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)) \subset \mathrm{Sing}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1)$.
- *Bravo-Villamayor*: Existe una sucesión de transformaciones tal que

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}\left[\left(I(H_1)^{\alpha_1} \ldots I(H_r)^{\alpha_r}\right) W^s\right] \text{ es monomial.}$$

¿Qué hacer en característica positiva?

En char p, $\mathcal{G}$ dif. y simple $\not\Rightarrow$ hip. cont. mxl. (ej. de Narasimhan).
Se sustituye la restricción por *proyecciones transversales*:

$$V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$$

Existe un álgebra $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[W]$, el **álgebra de eliminación**.

- En char 0, se identifican $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y $\overline{\mathcal{G}}$.
- Si $\mathcal{G}$ es diferencial, $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \xleftrightarrow{1-1} \beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) = \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$ (*).
- Para cada transformación monoidal $V^{(d)} \xleftarrow{\pi_C} V_1^{(d)}$, $C \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} & V^{(d)} \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_1^{(d)} \supset \mathcal{U} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "\beta_1"] & \mathcal{G}_1 \\
\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & V^{(d-1)} & V_1^{(d-1)} \arrow[l, "\widetilde{\pi}"'] & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{G}_1$ es diferencial relativo a β_1, pero no diferencial absoluto.
- (*) no es estable por explosiones, pero $\beta_1(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)) \subset \mathrm{Sing}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1)$.
- *Bravo-Villamayor*: Existe una sucesión de transformaciones tal que

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}\left[\left(I(H_1)^{\alpha_1}\dots I(H_r)^{\alpha_r}\right)W^s\right] \quad \text{es monomial.}$$

¿Qué hacer en característica positiva?

En char p, $\mathcal{G}$ dif. y simple $\not\Rightarrow$ hip. cont. mxl. (ej. de Narasimhan).
Se sustituye la restricción por *proyecciones transversales*:

$$V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$$

Existe un álgebra $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[W]$, el **álgebra de eliminación**.

- En char 0, se identifican $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y $\overline{\mathcal{G}}$.
- Si $\mathcal{G}$ es diferencial, $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) = \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$ (*).
- Para cada transformación monoidal $V^{(d)} \xleftarrow{\pi_C} V_1^{(d)}$, $C \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} & V^{(d)} \arrow[d, "\beta"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & & V_1^{(d)} \arrow[ll, "\pi"'] \supset \mathcal{U} \arrow[d, "\beta_1"] & \mathcal{G}_1 \\
\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & V^{(d-1)} & & V_1^{(d-1)} \arrow[ll, "\widetilde{\pi}"'] & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{G}_1$ es diferencial relativo a β_1, pero no diferencial absoluto.
- (*) no es estable por explosiones, pero $\beta_1(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)) \subset \mathrm{Sing}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1)$.
- *Bravo-Villamayor*: Existe una sucesión de transformaciones tal que

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}\left[\left(I(H_1)^{\alpha_1} \dots I(H_r)^{\alpha_r}\right) W^s\right] \text{ es monomial.}$$

¿Qué hacer en característica positiva?

En char p, $\mathcal{G}$ dif. y simple $\not\Rightarrow$ hip. cont. mxl. (ej. de Narasimhan).
Se sustituye la restricción por *proyecciones transversales*:

$$V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$$

Existe un álgebra $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[W]$, el **álgebra de eliminación**.

- En char 0, se identifican $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y $\overline{\mathcal{G}}$.
- Si $\mathcal{G}$ es diferencial, $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) = \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$ (*).
- Para cada transformación monoidal $V^{(d)} \xleftarrow{\pi_C} V_1^{(d)}$, $C \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} & V^{(d)} \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_1^{(d)} \supset \mathcal{U} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "\beta_1"] & \mathcal{G}_1 \\
\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & V^{(d-1)} & V_1^{(d-1)} \arrow[l, "\widetilde{\pi}"'] & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{G}_1$ es diferencial relativo a β_1, pero no diferencial absoluto.
- (*) no es estable por explosiones, pero $\beta_1(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)) \subset \mathrm{Sing}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1)$.
- *Bravo-Villamayor*: Existe una sucesión de transformaciones tal que

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}\left[\left(I(H_1)^{\alpha_1} \dots I(H_r)^{\alpha_r}\right) W^s\right] \quad \text{es monomial.}$$

¿Qué hacer en característica positiva?

En char p, $\mathcal{G}$ dif. y simple $\not\Rightarrow$ hip. cont. mxl. (ej. de Narasimhan).
Se sustituye la restricción por *proyecciones transversales*:

$$V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$$

Existe un álgebra $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[W]$, el **álgebra de eliminación**.

- En char 0, se identifican $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y $\overline{\mathcal{G}}$.
- Si $\mathcal{G}$ es diferencial, $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) = \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$ (*).
- Para cada transformación monoidal $V^{(d)} \xleftarrow{\pi_C} V_1^{(d)}$, $C \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} & V^{(d)} \arrow[d, "\beta"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft", shift right=4ex] & V_1^{(d)} \supset \mathcal{U} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "\beta_1"] & \mathcal{G}_1 \\
\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & V^{(d-1)} & V_1^{(d-1)} \arrow[l, "\widetilde{\pi}"'] & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{G}_1$ es diferencial relativo a β_1, pero no diferencial absoluto.
- (*) no es estable por explosiones, pero $\beta_1(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)) \subset \mathrm{Sing}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1)$.
- *Bravo-Villamayor*: Existe una sucesión de transformaciones tal que

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}\left[\left(I(H_1)^{\alpha_1} \dots I(H_r)^{\alpha_r}\right) W^s\right] \quad \text{es monomial.}$$

¿Qué hacer en característica positiva?

En char p, $\mathcal{G}$ dif. y simple $\not\Rightarrow$ hip. cont. mxl. (ej. de Narasimhan).
Se sustituye la restricción por *proyecciones transversales*:

$$V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$$

Existe un álgebra $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[W]$, el **álgebra de eliminación**.

- En char 0, se identifican $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y $\overline{\mathcal{G}}$.
- Si $\mathcal{G}$ es diferencial, $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \xleftrightarrow{1-1} \beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) = \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$ (*).
- Para cada transformación monoidal $V^{(d)} \xleftarrow{\pi_C} V_1^{(d)}$, $C \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} & V^{(d)} \arrow[d, "\beta"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft" near start, shift right=4ex] & V_1^{(d)} \supset \mathcal{U} \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d, "\beta_1"] & \mathcal{G}_1 \\
\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & V^{(d-1)} & V_1^{(d-1)} \arrow[l, "\widetilde{\pi}"'] & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{G}_1$ es diferencial relativo a β_1, pero no diferencial absoluto.
- (*) no es estable por explosiones, pero $\beta_1(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)) \subset \mathrm{Sing}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1)$.
- *Bravo-Villamayor*: Existe una sucesión de transformaciones tal que

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}\left[\left(I(H_1)^{\alpha_1} \dots I(H_r)^{\alpha_r}\right) W^s\right] \quad \text{es monomial.}$$

¿Qué hacer en característica positiva?

En char p, $\mathcal{G}$ dif. y simple $\not\Rightarrow$ hip. cont. mxl. (ej. de Narasimhan).
Se sustituye la restricción por *proyecciones transversales*:

$$V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$$

Existe un álgebra $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} \subset \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[W]$, el **álgebra de eliminación**.

- En char 0, se identifican $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y $\overline{\mathcal{G}}$.
- Si $\mathcal{G}$ es diferencial, $\mathrm{Sing}(\mathcal{G}) \xleftrightarrow{1-1} \beta(\mathrm{Sing}(\mathcal{G})) = \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})$ (*).
- Para cada transformación monoidal $V^{(d)} \xleftarrow{\pi_C} V_1^{(d)}$, $C \subset \mathrm{Sing}(\mathcal{G})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} & V^{(d)} \arrow[d, "\beta"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & & V_1^{(d)} \supset \mathcal{U} \arrow[lll, "\pi"'] \arrow[d, "\beta_1"] & \mathcal{G}_1 \\
\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta} & V^{(d-1)} & & V_1^{(d-1)} \arrow[lll, "\widetilde{\pi}"'] & (\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{G}_1,\beta_1}
\end{tikzcd}$$

- $\mathcal{G}_1$ es diferencial relativo a β_1, pero no diferencial absoluto.
- (*) no es estable por explosiones, pero $\beta_1(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_1)) \subset \mathrm{Sing}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_1)$.
- *Bravo-Villamayor*: Existe una sucesión de transformaciones tal que

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}\left[\left(I(H_1)^{\alpha_1} \dots I(H_r)^{\alpha_r}\right) W^s\right] \text{ es monomial.}$$

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}\left[\left(I(H_1)^{\alpha_1}\dots I(H_r)^{\alpha_r}\right)W^s\right] \text{ es monomial, pero}$$

$$\beta_r(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r)) \subsetneq \mathrm{Sing}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r).$$

Objetivo: Estudiar la contribución real de los excep. H_i en $\mathcal{G}_r$.

Teorema (presentación local)

$\mathcal{G}$ simple y dif. relativa a β. Para cualquier $f_nW^n \in \mathcal{G}$ de orden n,

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_nW^n, \Delta^j(f_n)W^{n-j}]_{1\leq j\leq n-1} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}. \qquad (1)$$

De hecho $n = p^e$ y $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \dots + a_{p^e} \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[z]$.

Objetivo: Fijada H excepcional, encontrar una expresión óptima

$$\mathcal{G} \subset \langle z\rangle W \odot I(H)^h W^s$$

para cierta sección z y $\frac{h}{s} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

$$(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r = \mathcal{O}_{V_r^{(d-1)}}\left[\left(I(H_1)^{\alpha_1}\dots I(H_r)^{\alpha_r}\right)W^s\right] \text{ es monomial, pero}$$

$$\beta_r(\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r)) \subsetneq \mathrm{Sing}((\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})_r).$$

Objetivo: Estudiar la contribución real de los excep. H_i en $\mathcal{G}_r$.

Teorema (presentación local)

$\mathcal{G}$ simple y dif. relativa a β. Para cualquier $f_n W^n \in \mathcal{G}$ de orden n,

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_n W^n, \Delta^j(f_n)W^{n-j}]_{1\leq j\leq n-1} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}. \quad (1)$$

De hecho $n = p^e$ y $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \dots + a_{p^e} \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[z]$.

Objetivo: Fijada H excepcional, encontrar una expresión óptima

$$\mathcal{G} \subset \langle z\rangle W \odot I(H)^h W^s$$

para cierta sección z y $\frac{h}{s} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Definición

Fijado $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$, se define la **pendiente excepcional relativa a** z:

$$Sl_H(f_{p^e}, z) := \min_{1 \le j \le p^e} \left\{ \frac{\nu_{\xi_H}(a_j)}{j} \right\}.$$

Posibilidades:

1. $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{\nu_{\xi_H}(a_n)}{n}$, $n < p^e$.
2. $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{\nu_{\xi_H}(a_{p^e})}{p^e} < \frac{\nu_{\xi_H}(a_n)}{n}$ y $\mathrm{In}_H(a_{p^e})$ no es potencia p^e.
3. $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{\nu_{\xi_H}(a_{p^e})}{p^e} < \frac{\nu_{\xi_H}(a_n)}{n}$ y $\mathrm{In}_H(a_{p^e})$ es potencia p^e.

Queremos optimizar $Sl_H(f_{p^e}, z)$ para los cambios de la sección (dados por $uz + \alpha$, para $u, \alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$, u unidad).

Proposición

• Si se da **1** ó **2**, ningún cambio $uz + \alpha$ aumenta la pendiente. Diremos que $f_{p^e}(z)$ está escrito en *forma normal*.

• Si se da **3**, existe un *algoritmo de limpieza* (cambios de sección) **finito** que aumenta la pendiente y que lleva a un caso **1** ó **2** (forma normal).

Definición

Fijado $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$, se define la **pendiente excepcional relativa a** z:

$$Sl_H(f_{p^e}, z) := \min_{1\leq j\leq p^e} \left\{\frac{\nu_{\xi_H}(a_j)}{j}\right\}.$$

Posibilidades:

1. $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{\nu_{\xi_H}(a_n)}{n}$, $n < p^e$.
2. $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{\nu_{\xi_H}(a_{p^e})}{p^e} < \frac{\nu_{\xi_H}(a_n)}{n}$ y $\mathrm{In}_H(a_{p^e})$ no es potencia p^e.
3. $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{\nu_{\xi_H}(a_{p^e})}{p^e} < \frac{\nu_{\xi_H}(a_n)}{n}$ y $\mathrm{In}_H(a_{p^e})$ es potencia p^e.

Queremos optimizar $Sl_H(f_{p^e}, z)$ para los cambios de la sección (dados por $uz + \alpha$, para $u, \alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$, u unidad).

Proposición

- Si se da **1** ó **2**, ningún cambio $uz + \alpha$ aumenta la pendiente. Diremos que $f_{p^e}(z)$ está escrito en *forma normal*.
- Si se da **3**, existe un *algoritmo de limpieza* (cambios de sección) **finito** que aumenta la pendiente y que lleva a un caso **1** ó **2** (forma normal).

Definición

Fijado $f_{p^e}(z) = z^{p^e} + a_1 z^{p^e-1} + \cdots + a_{p^e}$, se define la **pendiente excepcional relativa a** z:

$$Sl_H(f_{p^e}, z) := \min_{1\leq j\leq p^e} \left\{ \frac{\nu_{\xi_H}(a_j)}{j} \right\}.$$

Posibilidades:

1. $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{\nu_{\xi_H}(a_n)}{n}$, $n < p^e$.
2. $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{\nu_{\xi_H}(a_{p^e})}{p^e} < \frac{\nu_{\xi_H}(a_n)}{n}$ y $\mathrm{In}_H(a_{p^e})$ no es potencia p^e.
3. $Sl_H(f_{p^e}, z) = \frac{\nu_{\xi_H}(a_{p^e})}{p^e} < \frac{\nu_{\xi_H}(a_n)}{n}$ y $\mathrm{In}_H(a_{p^e})$ es potencia p^e.

Queremos optimizar $Sl_H(f_{p^e}, z)$ para los cambios de la sección (dados por $uz + \alpha$, para $u, \alpha \in \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$, u unidad).

Proposición

- Si se da **1** ó **2**, ningún cambio $uz + \alpha$ aumenta la pendiente. Diremos que $f_{p^e}(z)$ está escrito en *forma normal*.
- Si se da **3**, existe un *algoritmo de limpieza* (cambios de sección) **finito** que aumenta la pendiente y que lleva a un caso **1** ó **2** (forma normal).

Fijamos $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$ y una presentación local (digamos $\mathcal{P}\ell$)

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_{p^e}(z)W^{p^e}, \Delta^j(f_{p^e})W^{p^e-j}]_{1\leq j\leq p^e-1} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}.$$

Definición

La **pendiente excepcional de $\mathcal{G}$ relativa a z respecto de $\mathcal{P}\ell$** es

$$Sl_H(\mathcal{G}, \mathcal{P}\ell, z) := \min_{1\leq j\leq p^e} \left\{\frac{\nu_{\xi_H}(a_j)}{j}, \operatorname{ord}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})(\xi_H)\right\}.$$

Teorema

El cálculo de la pendiente se puede reducir a:

$$Sl_H(\mathcal{G}, \mathcal{P}\ell, z) = \left\{\frac{\nu_{\xi_H}(a_{p^e})}{p^e}, \operatorname{ord}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})(\xi_H)\right\}.$$

Observación

La información relevante está centrada en $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y a_{p^e}. Este Teorema es, en cierto modo, un análogo a la reducción al caso *puramente inseparable* en ξ_H.

Fijamos $V^{(d)} \xrightarrow{\beta} V^{(d-1)}$ y una presentación local (digamos $\mathcal{P}\ell$)

$$\mathcal{G} \sim \mathcal{O}_{V^{(d)}}[f_{p^e}(z)W^{p^e}, \Delta^j(f_{p^e})W^{p^e-j}]_{1\leq j\leq p^e-1} \odot \mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}.$$

Definición

La **pendiente excepcional de $\mathcal{G}$ relativa a z respecto de $\mathcal{P}\ell$** es

$$Sl_H(\mathcal{G}, \mathcal{P}\ell, z) := \min_{1\leq j\leq p^e} \left\{\frac{\nu_{\xi_H}(a_j)}{j}, \operatorname{ord}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})(\xi_H)\right\}.$$

Teorema

El cálculo de la pendiente se puede reducir a:

$$Sl_H(\mathcal{G}, \mathcal{P}\ell, z) = \left\{\frac{\nu_{\xi_H}(a_{p^e})}{p^e}, \operatorname{ord}(\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta})(\xi_H)\right\}.$$

Observación

La información relevante está centrada en $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y a_{p^e}. Este Teorema es, en cierto modo, un análogo a la reducción al caso *puramente inseparable* en ξ_H.

Definición

Sea $\mathcal{P}\ell$ una presentación local, z una sección de β tal que $f_{p^e}(z)$ está en forma normal. Se define la **pendiente virtual de** H como el número racional

$$\frac{h_H}{s} := Sl_H(\mathcal{G}, \mathcal{P}\ell, z).$$

Teorema

El número racional $\frac{h_H}{s}$ es independiente de la elección de β, $\mathcal{P}\ell$ y z con las propiedades anteriores. De hecho, $\frac{h_H}{s}$ es el máximo valor que puede dar una pendiente excepcional, i.e., para cualesquiera $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\mathcal{P}\ell}$ y $\widetilde{z}$ se cumple

$$\frac{h_H}{s} \geq Sl_H(\mathcal{G}, \widetilde{\mathcal{P}\ell}, \widetilde{z}).$$

Corolario

La pendiente virtual de H, $\frac{h_H}{s}$, define una inclusión óptima

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W \odot I(H)^{h_H} W^s.$$

De hecho, la definición de la pendiente virtual es global.

Teorema

El álgebra monomial definida de forma global por las pendientes virtuales de cada hipersuperficie excepcional H_i:

$$\mathcal{M}_r W^s = \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[I(H_1)^{h_1} \ldots I(H_r)^{h_r} W^s]$$

es tal que, localmente en cada punto, existe una sección $z \in \mathcal{O}_{V^{(d)}}$,

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W \odot \mathcal{M}_r W^s$$

y es óptima para esta inclusión, i.e., es el álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y a los coeficientes $a_j W^j$ $(j = 1, \ldots, p^e)$.

Esta álgebra $\mathcal{M}_r W^s$ recibe el nombre de **álgebra monomial virtual**.

Proposición

La resolución combinatoria de $\mathcal{M}_r W^s$ en $\mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$ induce un alargamiento de la sucesión de transformaciones:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{G} & & & & \mathcal{G}_r & & \mathcal{G}_{r+1} & & & & \mathcal{G}_N \\ V^{(d)} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & V_r^{(d)} & \longleftarrow & V_{r+1}^{(d)} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & V_N^{(d)} \end{array}$$

Teorema

El álgebra monomial definida de forma global por las pendientes virtuales de cada hipersuperficie excepcional H_i:

$$\mathcal{M}_r W^s = \mathcal{O}_{V^{(d-1)}}[I(H_1)^{h_1} \dots I(H_r)^{h_r} W^s]$$

es tal que, localmente en cada punto, existe una sección $z \in \mathcal{O}_{V^{(d)}}$,

$$\mathcal{G} \subset \langle z \rangle W \odot \mathcal{M}_r W^s$$

y es óptima para esta inclusión, i.e., es el álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{R}_{\mathcal{G},\beta}$ y a los coeficientes $a_j W^j$ $(j = 1, \dots, p^e)$.

Esta álgebra $\mathcal{M}_r W^s$ recibe el nombre de **álgebra monomial virtual**.

Proposición

La resolución combinatoria de $\mathcal{M}_r W^s$ en $\mathcal{O}_{V^{(d-1)}}$ induce un alargamiento de la sucesión de transformaciones:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{G} & & & & \mathcal{G}_r & & \mathcal{G}_{r+1} & & & & \mathcal{G}_N \\ V^{(d)} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & V_r^{(d)} & \longleftarrow & V_{r+1}^{(d)} & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & V_N^{(d)} \end{array}$$

Aplicaciones de los resultados de la memoria

1. A. Benito, *The τ-invariant and elimination*. Preprint 2009. 24 pp. http://arxiv.org/abs/1001.3126
2. A. Benito, O. E. Villamayor U., *Monoidal transforms and invariants of singularities in positive characteristic*. Preprint 2010. 66 pp.
   - Se define una función inductiva
     $$v - ord^{(d-1)} : \mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$$
     extendiendo la definición de pendiente a puntos arbitrarios.
   - Se generaliza la definición de $\mathcal{M}_r W^s$.
   - Se caracteriza un ánalogo al caso monomial en característica positiva (*caso fuertemente monomial*) en términos de $\mathcal{M}_r W^s$ y $v - ord^{(d-1)}$. Este caso implica resolución de singularidades.
     $$\boxed{\text{Caso monomial}} \overset{??}{=\!=\!=\!=\!\Rightarrow} \boxed{\text{Monomial fuerte}}$$
   - Pero... para dimensión 2, se presenta una demostración sencilla alternativa a la de Cossart-Jannsen-Saito de resolución inmersa.
3. A. Benito, O. E. Villamayor U., *The inductive function and Hironaka's weak equivalence*. En preparación.

Aplicaciones de los resultados de la memoria

1. A. Benito, *The τ-invariant and elimination*. Preprint 2009. 24 pp. http://arxiv.org/abs/1001.3126
2. A. Benito, O. E. Villamayor U., *Monoidal transforms and invariants of singularities in positive characteristic*. Preprint 2010. 66 pp.
   - Se define una función inductiva
   $$v - ord^{(d-1)} : \mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$$
   extendiendo la definición de pendiente a puntos arbitrarios.
   - Se generaliza la definición de $\mathcal{M}_r W^s$.
   - Se caracteriza un ánalogo al caso monomial en característica positiva (*caso fuertemente monomial*) en términos de $\mathcal{M}_r W^s$ y $v - ord^{(d-1)}$. Este caso implica resolución de singularidades.
   $$\boxed{\text{Caso monomial}} \overset{??}{=\!=\!=\!=\!\Rightarrow} \boxed{\text{Monomial fuerte}}$$
   - Pero... para dimensión 2, se presenta una demostración sencilla alternativa a la de Cossart-Jannsen-Saito de resolución inmersa.
3. A. Benito, O. E. Villamayor U., *The inductive function and Hironaka's weak equivalence*. En preparación.

Aplicaciones de los resultados de la memoria

1. A. Benito, *The τ-invariant and elimination*. Preprint 2009. 24 pp. http://arxiv.org/abs/1001.3126
2. A. Benito, O. E. Villamayor U., *Monoidal transforms and invariants of singularities in positive characteristic*. Preprint 2010. 66 pp.
   - Se define una función inductiva
     $$v-ord^{(d-1)}:\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r)\longrightarrow\mathbb{Q}_{\geq 0}$$
     extendiendo la definición de pendiente a puntos arbitrarios.
   - Se generaliza la definición de $\mathcal{M}_r W^s$.
   - Se caracteriza un ánalogo al caso monomial en característica positiva (*caso fuertemente monomial*) en términos de $\mathcal{M}_r W^s$ y $v-ord^{(d-1)}$. Este caso implica resolución de singularidades.
     $$\boxed{\text{Caso monomial}} \overset{??}{=\!=\!=\!=\!\Rightarrow} \boxed{\text{Monomial fuerte}}$$
   - Pero... para dimensión 2, se presenta una demostración sencilla alternativa a la de Cossart-Jannsen-Saito de resolución inmersa.
3. A. Benito, O. E. Villamayor U., *The inductive function and Hironaka's weak equivalence*. En preparación.

Aplicaciones de los resultados de la memoria

1. A. Benito, *The τ-invariant and elimination*. Preprint 2009. 24 pp. http://arxiv.org/abs/1001.3126
2. A. Benito, O. E. Villamayor U., *Monoidal transforms and invariants of singularities in positive characteristic*. Preprint 2010. 66 pp.
   - Se define una función inductiva
     $$v - ord^{(d-1)} : \mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$$
     extendiendo la definición de pendiente a puntos arbitrarios.
   - Se generaliza la definición de $\mathcal{M}_r W^s$.
   - Se caracteriza un ánalogo al caso monomial en característica positiva (*caso fuertemente monomial*) en términos de $\mathcal{M}_r W^s$ y $v - ord^{(d-1)}$. Este caso implica resolución de singularidades.
     $$\boxed{\text{Caso monomial}} \overset{??}{\Longrightarrow} \boxed{\text{Monomial fuerte}}$$
   - Pero... para dimensión 2, se presenta una demostración sencilla alternativa a la de Cossart-Jannsen-Saito de resolución inmersa.
3. A. Benito, O. E. Villamayor U., *The inductive function and Hironaka's weak equivalence*. En preparación.

Aplicaciones de los resultados de la memoria

1. A. Benito, *The τ-invariant and elimination*. Preprint 2009. 24 pp. http://arxiv.org/abs/1001.3126
2. A. Benito, O. E. Villamayor U., *Monoidal transforms and invariants of singularities in positive characteristic*. Preprint 2010. 66 pp.
   - Se define una función inductiva
   $$v-ord^{(d-1)}: \mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$$
   extendiendo la definición de pendiente a puntos arbitrarios.
   - Se generaliza la definición de $\mathcal{M}_r W^s$.
   - Se caracteriza un ánalogo al caso monomial en característica positiva (*caso fuertemente monomial*) en términos de $\mathcal{M}_r W^s$ y $v-ord^{(d-1)}$. Este caso implica resolución de singularidades.
   $$\boxed{\text{Caso monomial}} \overset{??}{=====\Rightarrow} \boxed{\text{Monomial fuerte}}$$
   - Pero... para dimensión 2, se presenta una demostración sencilla alternativa a la de Cossart-Jannsen-Saito de resolución inmersa.
3. A. Benito, O. E. Villamayor U., *The inductive function and Hironaka's weak equivalence*. En preparación.

Aplicaciones de los resultados de la memoria

1. A. Benito, *The τ-invariant and elimination*. Preprint 2009. 24 pp. http://arxiv.org/abs/1001.3126
2. A. Benito, O. E. Villamayor U., *Monoidal transforms and invariants of singularities in positive characteristic*. Preprint 2010. 66 pp.
   - Se define una función inductiva
     $$v-ord^{(d-1)}:\mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r)\longrightarrow\mathbb{Q}_{\geq 0}$$
     extendiendo la definición de pendiente a puntos arbitrarios.
   - Se generaliza la definición de $\mathcal{M}_r W^s$.
   - Se caracteriza un ánalogo al caso monomial en característica positiva (*caso fuertemente monomial*) en términos de $\mathcal{M}_r W^s$ y $v-ord^{(d-1)}$. Este caso implica resolución de singularidades.
     $$\boxed{\text{Caso monomial}} \overset{??}{= = = = \Rightarrow} \boxed{\text{Monomial fuerte}}$$
   - Pero... para dimensión 2, se presenta una demostración sencilla alternativa a la de Cossart-Jannsen-Saito de resolución inmersa.
3. A. Benito, O. E. Villamayor U., *The inductive function and Hironaka's weak equivalence*. En preparación.

Aplicaciones de los resultados de la memoria

1. A. Benito, *The τ-invariant and elimination*. Preprint 2009. 24 pp. http://arxiv.org/abs/1001.3126
2. A. Benito, O. E. Villamayor U., *Monoidal transforms and invariants of singularities in positive characteristic*. Preprint 2010. 66 pp.
   - Se define una función inductiva
   $$v - ord^{(d-1)} : \mathrm{Sing}(\mathcal{G}_r) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$$
   extendiendo la definición de pendiente a puntos arbitrarios.
   - Se generaliza la definición de $\mathcal{M}_r W^s$.
   - Se caracteriza un ánalogo al caso monomial en característica positiva (*caso fuertemente monomial*) en términos de $\mathcal{M}_r W^s$ y $v - ord^{(d-1)}$. Este caso implica resolución de singularidades.
   $$\boxed{\text{Caso monomial}} \overset{??}{=\,=\,=\,=\,=\Rightarrow} \boxed{\text{Monomial fuerte}}$$
   - Pero... para dimensión 2, se presenta una demostración sencilla alternativa a la de Cossart-Jannsen-Saito de resolución inmersa.
3. A. Benito, O. E. Villamayor U., *The inductive function and Hironaka's weak equivalence*. En preparación.